

VŨ QUỐC ANH

Tuyển tập

330

**BÀI TOÁN
HÌNH GIẢI TÍCH
CHỌN LỌC**

**THI VÀO ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG
TỪ 1993 ĐẾN 2001-2002**



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

VŨ QUỐC ANH

TUYỂN TẬP 330 BÀI TOÁN
HÌNH GIẢI TÍCH

C H Ọ N L Ọ C

THI VÀO ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG

TỪ 1993 ĐẾN 2001 - 2002

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI - 2001.

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: NGUYỄN VĂN THỎA

Tổng biên tập: NGUYỄN THIÊN GIÁP

Biên tập và sửa bài: TƯỜNG GIANG

LAN HƯƠNG

Trình bày bìa:

TRẦN TIỂU LÂM

TUYỂN TẬP 330 BÀI TOÁN HÌNH GIẢI TÍCH CHỌN LỌC

Mã số: 01. 196.ĐH 2001 - 33.2001.

In 1.500 cuốn, tại Công ty In Khoa học kỹ thuật - Hà Nội.

Số xuất bản: 340/33/CXB. Số trích ngang: 333 KH/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2001.

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRÊN MẶT PHẪNG

1. Đường thẳng

1. Đường thẳng qua điểm $A(x_0, y_0)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2)$

* Phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}$$

* Phương trình chính tắc:
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

2. Phương trình đường thẳng qua 2 điểm $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

3. Phương trình đường thẳng qua điểm M có pháp véc tơ $\vec{n} = (A, B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

4. Phương trình đường thẳng qua điểm $A(x_0, y_0)$ có hệ số góc k :

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

5. Đường thẳng d_1 có hệ số góc k_1 , d_2 có hệ số góc k_2

$$\text{Khi } d_1 // d_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \quad ; \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1 \quad ; \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

$$d_1 \text{ cắt } d_2 \Leftrightarrow k_1 \neq k_2 \quad ; \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

6. Nghiệm của hai đường thẳng $(d_1): A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$

$$(d_2): A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \text{Nghiệm} \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases} \quad (D \neq 0)$$

7. Phương trình đường thẳng qua đoạn chắn

Đường thẳng (d) qua $A(a, 0)$ và $B(0, b)$ có phương trình:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

8. Phương trình pháp dạng của đường thẳng

Phương trình $A_0x + B_0y + C_0 = 0$ với $A_0^2 + B_0^2 = 1$ là phương trình pháp dạng của đường thẳng (d)

9. Góc giữa hai đường thẳng:

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\operatorname{tg}(d_1, d_2) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

10. Khoảng cách từ điểm $M(x_M, y_M)$ đến đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

11. Phương trình đường phân giác

$(D_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0$; $(D_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ là pháp véc tơ của (D_1)

$\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ là pháp véc tơ của (D_2) , ta có:

Dấu của $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$	Phân giác góc nhọn	Phân giác góc tù
$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 > 0$	-	+
$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 < 0$	+	-

Diện tích tam giác ABC:

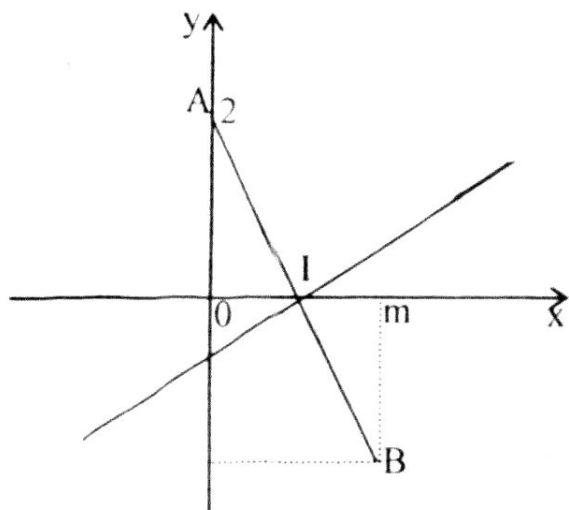
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \right|$$

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm $A(0,2)$ và điểm $B(m,-2)$. Hãy viết phương trình đường thẳng trung trực (d) của AB . Chứng minh rằng (d) luôn luôn tiếp xúc với một đường cong (C) cố định khi m thay đổi.

Đại học An ninh (1997, C)

GIẢI



Gọi $M(x,y)$ là một điểm trên đường thẳng d trung trực của AB .

Với $A(0,2)$ và $B(m,-2)$ ta có:

$$\Leftrightarrow AM^2 = BM^2$$

$$x^2 + (y-2)^2 = (x-m)^2 + (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{m}{4}x - \frac{m^2}{8} \quad (1)$$

Cách khác: Gọi I là trung điểm của AB có tọa độ $I\left(\frac{m}{2}, 0\right)$.

Hệ số góc k_{AB} của đường thẳng AB là $k_{AB} = \frac{2+2}{0-m} = -\frac{4}{m}$

Hệ số góc của đường trung trực của AB là $k = \frac{-1}{-4} = \frac{m}{4}$

Do đó đường trung trực của AB có phương trình là:

$$y-0 = \frac{m}{4}\left(x - \frac{m}{2}\right) = \frac{m}{4}x - \frac{m^2}{8}$$

(d) tiếp xúc với đường cong (C) cố định:

(1) có thể viết thành

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{8}(-2mx + m^2) = -\frac{1}{8}(-x^2 + x^2 - 2mx + m^2) \\ &= \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}(x-m)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

(2) luôn tiếp xúc với đường cong $y = \frac{1}{8}x^2$ vì phương trình

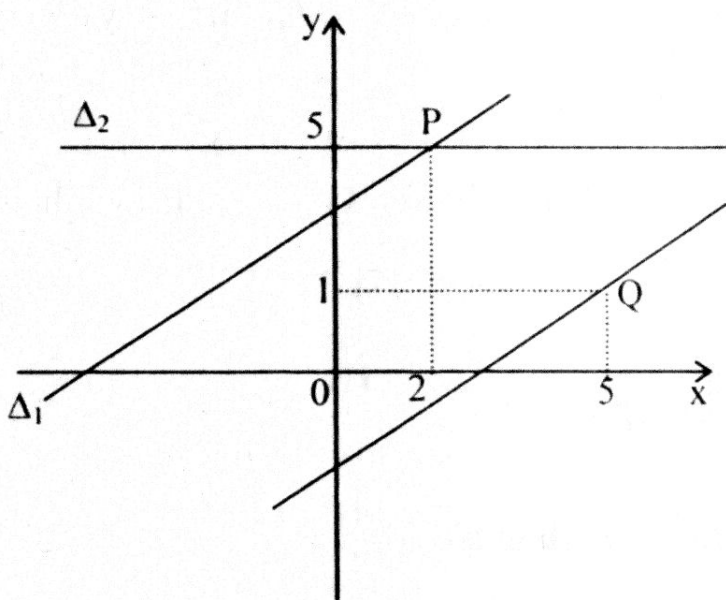
$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}(x-m)^2 = \frac{1}{8}x^2 \Leftrightarrow (x-m)^2 = 0 \text{ luôn luôn có nghiệm kép.}$$

Bài 2

Cho hai điểm $P(2;5)$ và $Q(5;1)$. Lập phương trình đường thẳng qua P sao cho khoảng cách từ Q đến đường thẳng đó bằng 3.

Trung tâm đào tạo cán bộ Y tế TP.HCM. (1993)

GIẢI



Phương trình đường thẳng qua $P(2,5)$ có dạng:

$$y-5 = k(x-2)$$

$$\Leftrightarrow kx - y + 5 - 2k = 0 \quad (\Delta_1)$$

và đường thẳng $x = 2$ (Δ_2)

Ta có:
$$d(Q, \Delta_1) = \frac{|5k - 1 + 5 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3$$

$$\Leftrightarrow |3k + 4| = 3\sqrt{k^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 + 24k + 16 = 9(k^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 24k = -7$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{7}{24} \quad (2)$$

Thế (2) vào Δ_1 ta được:

$$-\frac{7}{24}x - y + 5 + \frac{7}{12} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x + 24y - 134 = 0$$

Vậy có hai đường thẳng cách Q một khoảng cách bằng 3.

$$(\Delta_1): 7x + 24y - 134 = 0$$

$$(\Delta_2): x - 2 = 0$$

Bài 3

Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng D_1, D_2 có phương trình:

$$D_1: kx - y + k = 0$$

$$D_2: (1-k^2)x + 2ky - (1+k^2) = 0$$

1. Chứng minh rằng khi k thay đổi, đường thẳng D_1 luôn đi qua một điểm cố định.

2. Với mỗi giá trị của k , hãy xác định giao điểm của D_1 và D_2 .

3. Tìm quỹ tích của giao điểm đó khi k thay đổi.

Đại học Tổng hợp Thành phố Hồ Chí Minh (1994, A, B)

GIẢI

1. Chứng minh khi k thay đổi D_1 luôn đi qua một điểm cố định

Gọi $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cố định, $M_0 \in D_1 \quad \forall k$

$$\Leftrightarrow kx_0 - y_0 + k = 0 \quad \forall k$$

$$\Leftrightarrow k(x_0 + 1) - y_0 = 0 \quad \forall k \quad (1)$$

(1) đúng $\forall k$ khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng (D_1) luôn đi qua điểm cố định $M_0(-1, 0)$

2. Xác định giao điểm D_1 và D_2 với mỗi giá trị của k

Toạ độ giao điểm của D_1 và D_2 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} kx - y = -k \\ (1-k^2)x + 2ky = 1+k^2 \end{cases}$$

$$D = ab' - a'b = 2k^2 + (1-k^2) = 1+k^2$$

$$Dx = cb' - bc' = 1 - k^2.$$

$$Dy = ac' - ca' = 2k.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-k^2}{1+k^2} & (x \neq -1) \\ y = \frac{2k}{1+k^2} \end{cases}$$

3/ Đặt $k = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, ta có: $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} \quad (x \neq 1)$

Suy ra: $x^2 + y^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

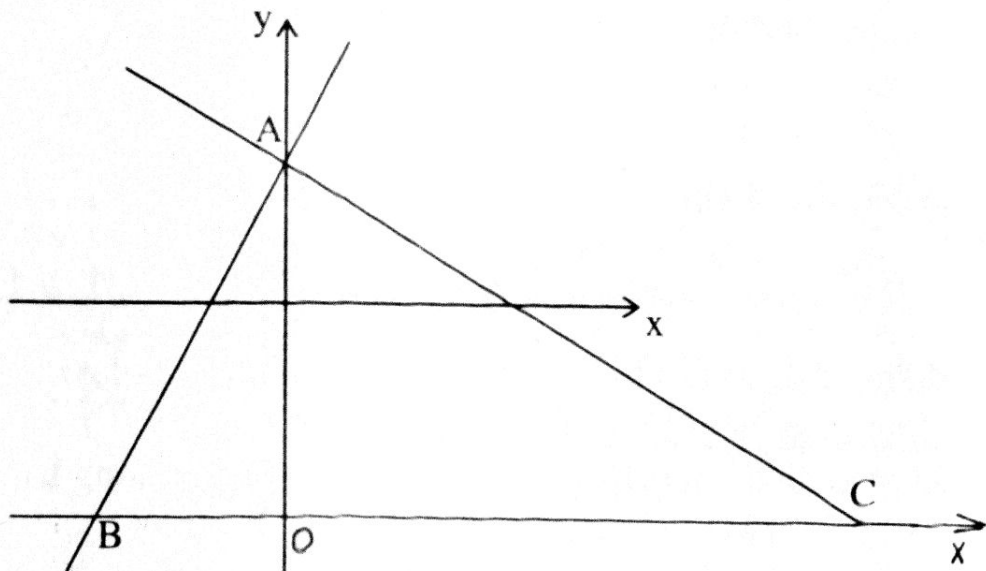
(2) là phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

Vậy quỹ tích của M là đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$

Bài 4

Phương trình 2 cạnh tam giác trong mặt phẳng tọa độ là $5x - 2y + 6 = 0$, $4x + 7y - 21 = 0$. Viết phương trình cạnh thứ ba của tam giác, Biết trực tâm của tam giác trùng với gốc tọa độ.

Đại học Bách khoa Hà Nội 1994



GIẢI

Gọi AB là cạnh tam giác có phương trình $5x - 2y + 6 = 0$ và AC là cạnh tam giác có phương trình $4x + 7y - 21 = 0$, như vậy tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x - 2y + 6 = 0 \\ 4x + 7y - 21 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $x_A = 0$ và $y_A = 3 \Rightarrow A$ ở trên trục Oy

Vì trực tâm tam giác trùng với gốc toạ độ nên đường cao tam giác phát xuất từ A nằm trên trục tung, do đó cạnh BC song song với trục Ox là đường thẳng có dạng $y = y_0$; y_0 chính là tung độ B.

Đường cao xuất phát từ B thẳng góc với cạnh AC ($4x + 7y - 21 = 0$) vì AC có hệ số góc $-\frac{4}{7}$ nên đường cao BH có hệ số góc $\frac{-1}{-\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$

Đường cao BH có phương trình là $y = \frac{7}{4}x$

Toạ độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 5x - 2y + 6 = 0 \\ y = \frac{7}{4}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_B = -4; y_B = -7$$

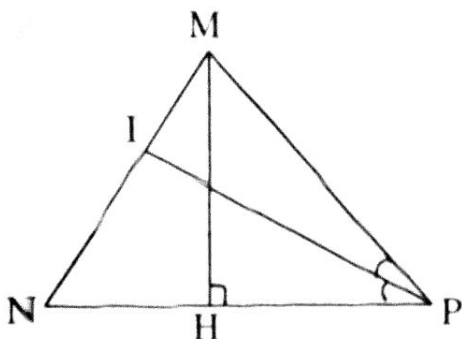
Vậy phương trình cạnh BC là $y = -7$

Bài 5

Lập phương trình các cạnh tam giác MNP biết N(2, -1); đường cao hạ từ M xuống NP có phương trình là $3x - 4y + 27 = 0$; đường phân giác trong hạ từ đỉnh P có phương trình là $x + 2y - 5 = 0$

Đại học Hàng Hải (1995)

GIẢI



Cạnh PH đi qua N(2, -1) và thẳng góc với đường cao

$$MH: (3x - 4y + 27 = 0)$$

có phương trình là:

$$4x + 3y + C = 0$$

qua N(2, -1) suy ra $8 - 3 + C = 0$

$$\Rightarrow C = -5$$